Über die Zerlegung der endlichen Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren.

Von Herrn *R. Remak* in Berlin.

Das Produkt zweier Untergruppen einer endlichen Gruppe wird dann ein *direktes Produkt* genannt, wenn jedes Element der einen Gruppe mit jedem Elemente der anderen Gruppe vertauschbar ist und die beiden Gruppen teilerfremd sind, d. h. außer dem Einheitselemente E kein Element gemeinsam haben. Das Zeichen der direkten Multiplikation sei $\times$. Wenn

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B},$$

so heiße $\mathfrak{A}$ sowohl wie $\mathfrak{B}$ *ein* direkter Faktor von $\mathfrak{H}$; $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ mögen *komplementäre* direkte Faktoren heißen. Eine Gruppe heiße *direkt unzerlegbar*, wenn sie nicht als das direkte Produkt zweier von E verschiedener Faktoren dargestellt werden kann. Der Zweck dieser Arbeit ist es, zu zeigen, daß die Zerlegung einer endlichen Gruppe in direkte unzerlegbare Faktoren isomorph eindeutig ist. Und zwar handelt es sich um Isomorphismen einer besonderen Art.

Unter *Isomorphismus* schlechthin soll hier immer der eindeutige Isomorphismus verstanden werden, der ein Element der einen Gruppe einem und nur einem Elemente der anderen Gruppe zuordnet. Der Isomorphismus zweier Untergruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{H}$ heiße dann ein *zentraler Isomorphismus* in $\mathfrak{H}$, wenn der Quotient je zweier einander zugeordneter Elemente ein invariantes Element von $\mathfrak{H}$ ist oder dem Zentrum $\mathfrak{H}_i$ von $\mathfrak{H}$ angehört. Ich will auch sagen, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien einander *zentral isomorph*. Ebenso heiße ein zentraler Isomorphismus von $\mathfrak{H}$ mit sich selber ein *zentraler Automorphismus* von $\mathfrak{H}$. Das Zeichen $\backsim$ bedeute den gewöhnlichen, das Zeichen $\underset{-}{\backsim}$ den zentralen Isomorphismus zwischen Gruppen. Der zu beweisende Hauptsatz läßt sich schärfer folgendermaßen formulieren:

Ist eine endliche Gruppe $\mathfrak{H}$ auf zweierlei Art in direkte unzerlegbare Faktoren zerlegt, so gibt es einen zentralen Automorphismus von $\mathfrak{H}$, der jedem Faktor der einen Zerlegung einen und nur einen Faktor der anderen Zerlegung zuordnet.

Dieser Automorphismus ist sicher ein äußerer, da ein innerer Automorphismus jeden direkten Faktor von $\mathfrak{H}$ in sich selber überführt.

Der Satz ist bereits bewiesen für die kommutativen Gruppen und zwar in einer Arbeit der Herren *Frobenius* und *Stickelberger*: „Über Gruppen vertauschbarer Elemente"*).

Es wird scharf zu unterscheiden sein zwischen isomorpher und identischer Eindeutigkeit der Zerlegung. Denn gewisse spezielle Gruppen zerfallen derart in direkt unzerlegbare Faktoren, daß die Faktoren einer Zerlegung, von der Reihenfolge abgesehen, mit den Faktoren einer anderen Zerlegung nicht nur isomorph, sondern identisch übereinstimmen.

Es soll § 1 dieser Arbeit eine Reihe vorbereitender Sätze, § 2 den Beweis des Hauptsatzes, § 3 zwei Sätze über den Ersatz einzelner Faktoren eines direkten Produktes durch zentral isomorphe bringen.

§ 1.

Die folgenden Eigenschaften der direkten Produkte mögen ohne Beweis angeführt werden.

Das direkte Produkt zweier Gruppen ist eine Gruppe.

Es gilt außer dem kommutativen das assoziative Gesetz der direkten Multiplikation:

$$\mathfrak{A} \times (\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}) = (\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) \times \mathfrak{C}.$$

Hieraus folgt in bekannter Weise, daß man die Faktoren eines direkten Produktes beliebig vieler Faktoren in beliebiger Reihenfolge schreiben und beliebig zusammenfassen darf. Man darf also in jedem direkten Produkte die Klammern weglassen. Das läßt sich auch folgendermaßen ausdrücken:

Enthalten zwei Teilprodukte eines direkten Produktes beliebige, aber verschiedene Faktoren, so sind sie teilerfremd.

Ist ein Element eines direkten Produktes dargestellt als Produkt von Elementen der Faktoren, so mögen die benutzten Elemente der Faktoren die *Komponenten* des Elementes des Produktes heißen. Die Komponenten des Produktes zweier Elemente eines direkten Produktes erhält

*) Dieses Journal, Bd. 86. S. 217.

man, indem man die aus demselben Faktor stammenden Komponenten der beiden Elemente in der richtigen Reihenfolge miteinander multipliziert.

Wenn

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}' \times \mathfrak{A}'' \times \cdots,$$

so kann eine Gleichung

$$E = A \cdot A' \cdot A'' \cdots$$

nur bestehen, wenn

$$A = E;\ A' = E;\ A'' = E; \ldots.$$

Hieraus folgt:

Jedes Element eines direkten Produktes ist eindeutig durch Komponenten darstellbar.

Ich will deshalb fortan das Multiplikationszeichen $\times$ auch zwischen den Komponenten eines Elementes verwenden, um damit anzudeuten, daß ein Element H von $\mathfrak{H}$ in seine eindeutigen Komponenten zerlegt ist:

$$H = A \times A' \times A'' \times \cdots.$$

Es muß dabei stets angegeben werden, auf welche Zerlegung von $\mathfrak{H}$ in direkte Faktoren sich die Zerlegung von H in Komponenten bezieht. Ich will daher auch sagen, das Element H von $\mathfrak{H}$ sei nach

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}' \times \mathfrak{A}'' \times \cdots$$

in Komponenten zerlegt.

Es heiße A die $\mathfrak{A}$-Komponente, A' die $\mathfrak{A}'$-Komponente von H, usw. Alle $\mathfrak{A}$-Komponenten der Elemente einer Untergruppe $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{H}$ bilden eine Untergruppe von $\mathfrak{A}$, die die $\mathfrak{A}$-Komponente von $\mathfrak{C}$ heiße.

Satz 1. Sind zwei Elemente eines direkten Produktes miteinander vertauschbar, so ist jede Komponente des einen Elementes mit jeder Komponente des anderen Elementes vertauschbar.

Die aus verschiedenen Faktoren stammenden Komponenten sind der Definition nach miteinander vertauschbar. Wenn ferner

$$H_1 H_2 = H_2 H_1,$$

so gilt auch für die $\mathfrak{A}$-Komponenten dieser Elemente:

$$A_1 A_2 = A_2 A_1.$$

Daher ist auch H_1 mit allen Komponenten von H_2 vertauschbar. Die Komponenten eines invarianten Elementes eines direkten Produktes sind also mit allen Elementen des Produktes vertauschbar, d. h. sie sind selbst invariante Elemente. Da umgekehrt die invarianten Elemente der Faktoren auch invariante Elemente des Produktes sind, so folgt:

Das Zentrum eines direkten Produktes ist das direkte Produkt der Zentren der Faktoren.

Wenn

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{A}\times\mathfrak{A}'\times\mathfrak{A}''\times\cdots,$$

so ist

$$\mathfrak{H}_i=\mathfrak{A}_i\times\mathfrak{A}_i'\times\mathfrak{A}_i''\times\cdots.$$

Es bedeute

$$(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$$

den größten gemeinsamen Teiler der Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

$$\mathfrak{H}>\mathfrak{C}$$

bedeute: $\mathfrak{C}$ ist eine Untergruppe von $\mathfrak{H}$.

Satz 2. Es sei

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{A}\times\mathfrak{B},\quad \mathfrak{H}>\mathfrak{C}>\mathfrak{A},$$

dann ist

$$\mathfrak{C}=\mathfrak{A}\times(\mathfrak{B},\mathfrak{C}).$$

Es ist

$$\mathfrak{A}<\mathfrak{C} \text{ und } (\mathfrak{B},\mathfrak{C})<\mathfrak{C},$$

also ist

$$\mathfrak{A}\times(\mathfrak{B},\mathfrak{C})<\mathfrak{C}.$$

Ferner sei

$$C=A\times B$$

die Zerlegung eines Elementes C von $\mathfrak{C}$ nach

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}.$$

Es sind C und A Elemente von $\mathfrak{C}$, also ist

$$A^{-1}\cdot C=B$$

ein Element von $\mathfrak{C}$, somit auch von $(\mathfrak{B},\mathfrak{C})$. Also ist

$$\mathfrak{C}<\mathfrak{A}\times(\mathfrak{B},\mathfrak{C}).$$

Es war aber

$$\mathfrak{C}>\mathfrak{A}\times(\mathfrak{B},\mathfrak{C}),$$

weshalb

$$\mathfrak{C}=\mathfrak{A}\times(\mathfrak{B},\mathfrak{C}).$$

Ebenfalls ohne Beweis mögen folgende Eigenschaften des zentralen Isomorphismus erwähnt werden.

Wenn

$$\mathfrak{A}\simeq\mathfrak{B} \text{ und } \mathfrak{A}\simeq\mathfrak{C}, \text{ so ist } \mathfrak{B}\simeq\mathfrak{C}.$$

Aus

$$\mathfrak{A}\simeq\mathfrak{B} \text{ folgt } \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{H}_i=\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{H}_i.$$

Sind die Faktoren zweier direkter Produkte paarweise einander isomorph, so zeigt man, daß die Produkte einander isomorph sind, indem man aus zugeordneten Komponenten gebildete Elemente einander zuordnet. Der Isomorphismus der Produkte ist ein zentraler, wenn es der der Faktoren ist. Die Konstitution eines direkten Produktes ist durch die Konstitution seiner Faktoren vollständig bestimmt. Der Hauptsatz wird also bewiesen sein, wenn es gelingt, zu zeigen, daß die Faktoren zweier verschiedener Zerlegungen einer Gruppe in direkte unzerlegbare Faktoren paarweise einander zentral isomorph sind.

Satz 3. Verschiedene komplementäre direkte Faktoren desselben direkten Faktors einer Gruppe sind einander isomorph.

Wenn

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \text{ und } \mathfrak{H} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{C},$$

so ist

$$\mathfrak{B} \curvearrowright \mathfrak{C}.$$

Hierbei werden die $\mathfrak{B}$ *und* $\mathfrak{C}$ *gemeinsamen Elemente sich selber zugeordnet.*

Wenn

$$\mathfrak{A} < \mathfrak{H}_{\mathfrak{z}},$$

so ist

$$\mathfrak{B} \underline{\curvearrowright} \mathfrak{C}.$$

Es sei

$$B_1 = A_1 \times C_1$$

die Zerlegung eines Elementes B_1 von $\mathfrak{B}$ in Komponenten nach

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{C}.$$

Man ordne C_1 und B_1 einander zu. Die Zuordnung ist umkehrbar eindeutig, da

$$C_1 = A_1^{-1} \times B_1$$

die Zerlegung von C_1 in Komponenten nach

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$$

ist. Ebenso sei

$$B_2 = A_2 \times C_2, \ B_3 = A_3 \times C_3,$$

ferner

$$B_1 B_2 = B_3$$

oder

$$A_1 A_2 \times C_1 C_2 = A_3 \times C_3,$$

also

$$C_1 C_2 = C_3.$$

Die Produkte zugeordneter Elemente sind einander zugeordnet. Also ist

$$\mathfrak{B} \curvearrowright \mathfrak{C}.$$

Es ist

$$B_1 C_1^{-1} = A_1.$$

Wenn

$$\mathfrak{A} < \mathfrak{H}_i,$$

so ist

$$\mathfrak{B} \simeq \mathfrak{C}.$$

Ist das Element B in $\mathfrak{B}$ und in $\mathfrak{C}$ enthalten, so ist

$$B = E \times B$$

seine Zerlegung sowohl nach

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$$

wie nach

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{C}.$$

Also wird B sich selber zugeordnet.

Aus der im Anfange erwähnten Arbeit der Herren *Frobenius* und *Stickelberger* werde ich die Existenz einer Basis der kommutativen Gruppen als bekannt voraussetzen*). Diese Ergebnisse mögen folgendermaßen ausgedrückt werden:

Unter den kommutativen Gruppen sind alle zyklischen Gruppen von Primzahlpotenzordnung und nur diese direkt unzerlegbar. Jede kommutative Gruppe kann also als direktes Produkt von zyklischen Gruppen von Primzahlpotenzordnung dargestellt werden.

Dagegen werde ich die Eindeutigkeit der Invarianten der kommutativen Gruppen**) oder, was dasselbe bedeutet, die isomorphe Eindeutigkeit der Zerlegung der kommutativen Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren nicht als bekannt voraussetzen. Sie wird als spezieller Fall des Hauptsatzes dieser Arbeit mit bewiesen.

Es sei $\mathfrak{C}$ eine zyklische Gruppe von der Primzahlpotenzordnung p^γ; die kleinste von E verschiedene Untergruppe von $\mathfrak{C}$, deren Ordnung p ist, möge mit $\mathfrak{C}_p$ bezeichnet werden. Da $\mathfrak{C}_p$ in allen Untergruppen von $\mathfrak{C}$ enthalten ist, hat $\mathfrak{C}$ mit irgend einer Gruppe $\mathfrak{A}$ dann und nur dann einen Teiler gemeinsam, wenn

$$\mathfrak{C}_p < \mathfrak{A}.$$

§ 2.

Hauptsatz: Ist eine Gruppe auf zweierlei Art in direkte unzerlegbare Faktoren zerlegt, so sind die Faktoren der beiden Zerlegungen paarweise einander zentral isomorph.

---

*) Siehe auch: *Weber*, Lehrbuch der Algebra, Bd. II, (2. Aufl.) § 11, S. 38.

**) Siehe auch: a. a. O. § 12, S. 45.

Der Beweis wird durch Induktion geführt. Der Satz sei bereits bewiesen in allen Fällen, in denen die Ordnung der ganzen Gruppe $\mathfrak{H}$ kleiner ist als im vorliegenden Falle.

Die beiden Zerlegungen seien

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2 \times \cdots \times \mathfrak{P}_m \times \mathfrak{Q}_1 \times \mathfrak{Q}_2 \times \cdots \times \mathfrak{Q}_n,$$
$$\mathfrak{H} = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2 \times \cdots \times \mathfrak{R}_r \times \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2 \times \cdots \times \mathfrak{S}_s.$$

Man setze

$$\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2 \times \cdots \times \mathfrak{P}_m = \mathfrak{A},$$
$$\mathfrak{Q}_1 \times \mathfrak{Q}_2 \times \cdots \times \mathfrak{Q}_n = \mathfrak{B},$$
$$\mathfrak{R}_2 \times \mathfrak{R}_3 \times \cdots \times \mathfrak{R}_r \times \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2 \times \cdots \times \mathfrak{S}_s = \mathfrak{G},$$

dann ist

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B},$$
$$\mathfrak{H} = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{G}.$$

Man hat zwei Hauptfälle zu unterscheiden.

Fall 1): Es enthalte eine der beiden Zerlegungen einen kommutativen direkten Faktor, z. B. sei $\mathfrak{R}_1$ zyklisch von der Primzahlpotenzordnung p^α. Es sei R ein Basiselement von $\mathfrak{R}_1$. Man zerlege R nach

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$$

in Komponenten:

$$R = A' \times B'.$$

Es ist

$$R^{p^{\alpha-1}} = A'^{p^{\alpha-1}} \times B'^{p^{\alpha-1}} \neq E,$$
$$R^{p^\alpha} = A'^{p^\alpha} \times B'^{p^\alpha} = E,$$

also

$$A'^{p^\alpha} = E,$$
$$B'^{p^\alpha} = E.$$

Die Ordnungen von A' und B' gehen in p^α auf. Eine der beiden Komponenten, z. B. A', muß die Ordnung p^α besitzen. Die Ordnung von B' sei p^β. Es sind zwei Unterfälle zu unterscheiden, je nachdem $\alpha > \beta$ oder $\alpha = \beta$.

Unterfall 1): $\alpha > \beta$.

Es ist

$$R^{p^{\alpha-1}} = A'^{p^{\alpha-1}} \times B'^{p^{\alpha-1}} = A'^{p^{\alpha-1}},$$

da

$$B'^{p^{\alpha-1}} = E.$$

Bezeichnet man die Gruppe der Potenzen von A' mit $\mathfrak{A}'$, so ist

$$\mathfrak{R}_{1p} = \mathfrak{A}'_p.$$

Da $\mathfrak{R}_1$ zu $\mathfrak{G}$ teilerfremd, so ist $\mathfrak{R}_{1p}$ nicht in $\mathfrak{G}$ enthalten, also auch $\mathfrak{A}'_p$ nicht, also ist $\mathfrak{A}'$ zu $\mathfrak{G}$ teilerfremd. Die Elemente von $\mathfrak{R}_1$ sind invariante Elemente von $\mathfrak{H}$, also auch ihre Komponenten, die Elemente von $\mathfrak{A}'$. Daher ist das Produkt von $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{G}$ ein direktes Produkt.

Es ist

$$\mathfrak{A}' \times \mathfrak{G} = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{G} = \mathfrak{H},$$

da beide Produkte von gleicher Ordnung sind.

Unterfall 2): $\alpha = \beta$.

Es sei $\mathfrak{B}'$ die Gruppe der Potenzen von B'. Man setze

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{A}' \times \mathfrak{B}'.$$

Da

$$\mathfrak{H} > \mathfrak{H}' > \mathfrak{R}_1 \text{ und } \mathfrak{H} = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{G},$$

so ist nach Satz 2)

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{R}_1 \times (\mathfrak{H}', \mathfrak{G}).$$

Setzt man $(\mathfrak{H}', \mathfrak{G}) = \mathfrak{G}'$, so wird

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{G}'.$$

Es soll gezeigt werden, daß $\mathfrak{G}'$ eine zyklische Gruppe der Ordnung p^α ist. Es ist

$$R = A' \times B'$$

also

$$R^{p^{\alpha-1}} = A'^{p^{\alpha-1}} \times B'^{p^{\alpha-1}},$$
$$\mathfrak{R}_{1p} \neq \mathfrak{A}'_p.$$

Man zerlege A' nach

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{G}'$$

in Komponenten:

$$A' = R^k \times G',$$

wo G' ein Element von $\mathfrak{G}'$. Es sei G' von der Ordnung p^β, wo $\beta \leqq \alpha$. Es ist

$$A'^{p^{\alpha-1}} = R^{k \cdot p^{\alpha-1}} \times G'^{p^{\alpha-1}}.$$

Wäre $\beta < \alpha$, so wäre

$$G'^{p^{\alpha-1}} = E,$$

also

$$A'^{p^{\alpha-1}} = R^{k \cdot p^{\alpha-1}}$$

oder

$$\mathfrak{A}'_p = \mathfrak{R}_{1p},$$

was nicht der Fall ist. Also ist $\beta = \alpha$. Die Gruppe $\mathfrak{G}'$ von der Ordnung p^α ist zyklisch, weil sie ein Element G' der Ordnung p^α enthält.

Da $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ teilerfremd, ist

$$\mathfrak{A}'_p \neq \mathfrak{B}'_p .$$

$\mathfrak{G}'_p$ kann also höchstens einer der beiden Gruppen $\mathfrak{A}'_p$ oder $\mathfrak{B}'_p$ gleich sein, ist daher von mindestens einer der beiden verschieden. Es sei z. B.

$$\mathfrak{A}'_p \neq \mathfrak{G}'_p .$$

Dann ist $\mathfrak{A}'_p$ nicht in $\mathfrak{G}$ enthalten; denn sonst wäre

$$\mathfrak{A}'_p < \mathfrak{H}', \quad \mathfrak{A}'_p < \mathfrak{G}, \quad \mathfrak{A}'_p < (\mathfrak{H}', \mathfrak{G}) = \mathfrak{G}',$$

also $\mathfrak{A}'_p = \mathfrak{G}'_p$, was nicht der Fall ist. Also ist $\mathfrak{A}'$ zu $\mathfrak{G}$ teilerfremd, also ist wie im ersten Unterfalle

$$\mathfrak{A}' \times \mathfrak{G} = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{G} = \mathfrak{H} .$$

Für beide Unterfälle gemeinsam mache man folgende weiteren Schlüsse. Es ist

$$\mathfrak{H} > \mathfrak{A} > \mathfrak{A}' \text{ und } \mathfrak{H} = \mathfrak{A}' \times \mathfrak{G},$$

also nach Satz 2)

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \times (\mathfrak{A}, \mathfrak{G}) .$$

Setzt man

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{G}) = \mathfrak{F},$$

so wird

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \times \mathfrak{F} .$$

Es ist

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = \mathfrak{A}' \times \mathfrak{F} \times \mathfrak{B},$$

ferner

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A}' \times \mathfrak{G} .$$

Also ist nach Satz 3)

$$\mathfrak{F} \times \mathfrak{B} \simeq \mathfrak{G} .$$

Man denke sich $\mathfrak{F}$ in direkte unzerlegbare Faktoren zerlegt:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{T}_2 \times \mathfrak{T}_3 \times \cdots \times \mathfrak{T}_t .$$

Da $\mathfrak{A}$ von niedrigerer Ordnung ist als $\mathfrak{H}$, so ist für $\mathfrak{A}$ der Hauptsatz bereits bewiesen; also ist

$$\mathfrak{P}_1 \simeq \mathfrak{A}', \; \mathfrak{P}_\mu \simeq \mathfrak{T}_\mu \text{ für } \nu = 2, 3, \ldots, m, \text{ sodaß } t = m .$$

Es ist

$$\mathfrak{F} \times \mathfrak{B} = \mathfrak{T}_2 \times \mathfrak{T}_3 \times \cdots \times \mathfrak{T}_m \times \mathfrak{Q}_1 \times \mathfrak{Q}_2 \times \cdots \times \mathfrak{Q}_n .$$

Der zentrale Isomorphismus

$$\mathfrak{F} \times \mathfrak{B} \simeq \mathfrak{G}$$

ordnet die Untergruppen $\mathfrak{T}_\mu$ von $\mathfrak{F}$ nach Satz 3) sich selber zu, da

$$\mathfrak{F} < \mathfrak{F} \times \mathfrak{B}$$

und

$$\mathfrak{F} < \mathfrak{G} .$$

Den Untergruppen $\mathfrak{O}_\nu$ von $\mathfrak{B}$ ordne er die Untergruppen $\mathfrak{U}_\nu$ von $\mathfrak{G}$ für $\nu = 1, 2, \dots n$ zu. Es ist

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{T}_2 \times \mathfrak{T}_3 \times \cdots \times \mathfrak{T}_m \times \mathfrak{U}_1 \times \mathfrak{U}_2 \times \cdots \times \mathfrak{U}_n.$$

Es war

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{R}_2 \times \mathfrak{R}_3 \times \cdots \times \mathfrak{R}_r \times \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2 \times \cdots \times \mathfrak{S}_s.$$

Da $\mathfrak{G}$ von geringerer Ordnung ist als $\mathfrak{H}$, gilt für $\mathfrak{G}$ bereits der Hauptsatz; also ist

$$\mathfrak{T}_\mu \simeq \mathfrak{R}_\mu \text{ für } \mu = 2, 3, \dots, m, \text{ so daß } m = r,$$
$$\mathfrak{U}_\nu \simeq \mathfrak{S}_\nu \text{ für } \nu = 1, 2, \dots, n, \text{ so daß } n = s.$$

Ferner ist

$$\mathfrak{A}' < \mathfrak{H}_i, \quad \mathfrak{R}_1 < \mathfrak{H}_i,$$

also

$$\mathfrak{A}' \simeq \mathfrak{R}_1.$$

Es ist

$$\mathfrak{P}_1 \simeq \mathfrak{A}' \simeq \mathfrak{R}_1,$$
$$\mathfrak{P}_\mu \simeq \mathfrak{T}_\mu \simeq \mathfrak{R}_\mu \text{ für } \mu = 2, 3, \dots m,$$
$$\mathfrak{O}_\nu \simeq \mathfrak{U}_\nu \simeq \mathfrak{S}_\nu \text{ für } \nu = 1, 2, \dots n.$$

Damit ist Fall 1) bewiesen.

Fall 2): Es enthalte keine der beiden Zerlegungen von $\mathfrak{H}$ einen kommutativen direkten Faktor.

Unter Beibehaltung der Bezeichnungen sei

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{G}.$$

Es sei $\mathfrak{A}'$ die $\mathfrak{A}$-Komponente, $\mathfrak{B}'$ die $\mathfrak{B}$-Komponente von $\mathfrak{R}_1$. Man setze

$$\mathfrak{A}' \times \mathfrak{B}' = \mathfrak{H}'.$$

Da

$$\mathfrak{H} > \mathfrak{H}' > \mathfrak{R}_1 \text{ und } \mathfrak{H} = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{G},$$

so ist

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{R}_1 \times (\mathfrak{H}', \mathfrak{G}).$$

Man setze $(\mathfrak{H}', \mathfrak{G}) = \mathfrak{G}'$, so daß

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{G}'.$$

Da alle Elemente von $\mathfrak{G}$ mit allen Elementen von $\mathfrak{R}_1$ vertauschbar sind, so sind sie auch mit deren sämtlichen Komponenten, d. h. mit allen Elementen von $\mathfrak{H}'$, insbesondere mit allen Elementen von $\mathfrak{G}' < \mathfrak{H}'$ vertauschbar. Da $\mathfrak{G}' < \mathfrak{G}$, so folgt, daß

$$\mathfrak{G}' < \mathfrak{G}_i.$$

Wäre

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{H},$$

so wäre

$$\mathfrak{G}' = \mathfrak{G},$$

also

$$\mathfrak{G} < \mathfrak{G}_i,$$

d. h. $\mathfrak{G}$ wäre eine kommutative Gruppe, was der Voraussetzung widerspricht. Also ist $\mathfrak{H}'$ von niedrigerer Ordnung als $\mathfrak{H}$. Für $\mathfrak{H}'$ gilt bereits der Hauptsatz. Zerlegt man $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ in direkte unzerlegbare Faktoren, so enthält eine der beiden Gruppen, z. B. $\mathfrak{A}'$, einen nicht kommutativen direkten Faktor, der zentral isomorph $\mathfrak{R}_1$. Da aber $\mathfrak{A}'$ nicht von höherer Ordnung ist als $\mathfrak{R}_1$, so ist

$$\mathfrak{R}_1 \simeq \mathfrak{A}'.$$

Es war

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{G}' = \mathfrak{A}' \times \mathfrak{B}',$$

folglich

$$\mathfrak{G}' \simeq \mathfrak{B}',$$

d. h. $\mathfrak{B}'$ ist kommutativ. Es ist

$$\mathfrak{R}_1 \cdot \mathfrak{H}_i' = \mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{H}_i',$$

also auch

$$\mathfrak{R}_1 \cdot \mathfrak{H}_i = \mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{H}_i < \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{H}_i,$$

also

$$\mathfrak{R}_1 < \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{H}_i.$$

Es sei

$$\mathfrak{R}_\varrho < \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{H}_i \text{ für } \varrho = 1, 2, \ldots r,$$
$$\mathfrak{S}_\sigma < \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{H}_i \text{ für } \sigma = 1, 2, \ldots s.$$

Also ist

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{H}_i > \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2 \times \cdots \times \mathfrak{R}_r = \mathfrak{C},$$
$$\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{H}_i > \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2 \times \cdots \times \mathfrak{S}_s = \mathfrak{D}.$$

Es ist

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{C} \times \mathfrak{D},$$
$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{H}_i = \mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{A}_i \times \mathfrak{B}_i) = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}_i,$$

ferner, da

$$\mathfrak{H} > \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{H}_i > \mathfrak{C} \text{ und } \mathfrak{H} = \mathfrak{C} \times \mathfrak{D},$$

so ist nach Satz 2)

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{H}_i = \mathfrak{C} \times (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{H}_i, \mathfrak{D}).$$

Es ist

$$(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{H}_i, \mathfrak{D}) < (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{H}_i, \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{H}_i).$$

Da jedes Element, das den beiden Gruppen $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{H}_i$ und $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{H}_i$ gemeinsam ist, mit den Elementen der einen Gruppe vertauschbar, weil zur anderen gehörig ist, so ist es mit jedem Elemente von $\mathfrak{H}$ vertauschbar, also

$$(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{H}_i, \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{H}_i) < \mathfrak{H}_i.$$

Da aber

$$(\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{H}_i, \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{H}_i) > \mathfrak{H}_i,$$

so ist

$$(\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{H}_i, \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{H}_i) = \mathfrak{H}_i.$$

Also ist

$$(\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{H}_i, \mathfrak{D}) < \mathfrak{H}_i, \quad (\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{H}_i, \mathfrak{D}) < (\mathfrak{H}_i, \mathfrak{D}).$$

Da aber

$$(\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{H}_i, \mathfrak{D}) > (\mathfrak{H}_i, \mathfrak{D}),$$

so ist

$$(\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{H}_i, \mathfrak{D}) = (\mathfrak{H}_i, \mathfrak{D}) = \mathfrak{D}_i,$$

also

$$\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}_i = \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{H}_i = \mathfrak{C}\times\mathfrak{D}_i.$$

Da $\mathfrak{B}$ nicht kommutativ, so ist $\mathfrak{B}_i$ von kleinerer Ordnung als $\mathfrak{B}$, also $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}_i$ von kleinerer Ordnung als $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$. Für $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}_i$ gilt also bereits der Hauptsatz. Da bei der Zerlegung $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ nicht kommutative, $\mathfrak{B}_i$ und $\mathfrak{D}_i$ kommutative direkte unzerlegbare Faktoren liefern, so müssen die direkten unzerlegbaren Faktoren von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ paarweise einander zentral isomorph sein, d. h. es ist

$$\mathfrak{P}_\mu \simeq \mathfrak{R}_\mu$$

für $\mu = 1, 2, \ldots m$, so daß $m = r$. Ebenso zeigt man, daß

$$\mathfrak{Q}_\nu \simeq \mathfrak{S}_\nu$$

für $\nu = 1, 2, \ldots n$, so daß $n = s$. Damit ist der zweite Fall des Hauptsatzes bewiesen. Da dieser für direkt unzerlegbare Gruppen trivial ist, gilt er allgemein.

Einfacher läßt sich ein spezieller Fall dieses Satzes beweisen.

Eine Gruppe, die außer E keine invarianten Elemente besitzt, ist identisch eindeutig in direkte unzerlegbare Faktoren zerlegbar.

Kein direkter Faktor einer solchen Gruppe kann außer E invariante Elemente besitzen, da diese auch invariante Elemente der ganzen Gruppe wären.

Der Satz sei bereits bewiesen für alle Gruppen von niedrigerer Ordnung als die vorliegende. Es mögen die Bezeichnungen wie im Hauptsatze gebraucht werden. Es läßt sich ebenso, wie dort im Falle 2) zeigen, daß

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{G}'.$$

Da aber

$$\mathfrak{G}' < \mathfrak{G}_i \text{ und } \mathfrak{G}_i = E,$$

so ist $\mathfrak{G}' = E$. Also ist

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{R}_1 \text{ oder}$$
$$\mathfrak{A}' \times \mathfrak{B}' = \mathfrak{R}_1 .$$

Da $\mathfrak{R}_1$ direkt unzerlegbar, so ist z. B.

$$\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{A}', \ \mathfrak{B}' = E,$$

also

$$\mathfrak{R}_1 < \mathfrak{A}.$$

Es sei

$$\mathfrak{R}_\varrho < \mathfrak{A} \text{ für } \varrho = 1, 2, \ldots r,$$
$$\mathfrak{S}_\sigma < \mathfrak{B} \text{ für } \sigma = 1, 2, \ldots s.$$

Also ist

$$\mathfrak{A} > \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2 \times \cdots \times \mathfrak{R}_r = \mathfrak{C},$$
$$\mathfrak{B} > \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2 \times \cdots \times \mathfrak{S}_s = \mathfrak{D}.$$

Es ist

$$\mathfrak{H} > \mathfrak{A} > \mathfrak{C}, \ \mathfrak{H} = \mathfrak{C} \times \mathfrak{D},$$

also

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{C} \times (\mathfrak{A}, \mathfrak{D}).$$

Es ist aber

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{D}) < (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = E,$$

also ist

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{C}.$$

Ebenso zeigt man, daß

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{D}.$$

Da $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von niedrigerer Ordnung als $\mathfrak{H}$, so ist für sie der Satz bereits bewiesen.

Es ist also

$$\mathfrak{P}_\mu = \mathfrak{R}_\mu \text{ für } \mu = 1, 2, \ldots m, \text{ so daß } m = r,$$
$$\mathfrak{Q}_\nu = \mathfrak{S}_\nu \text{ für } \nu = 1, 2, \ldots n, \text{ so daß } n = s.$$

Da der Satz für direkt unzerlegbare Gruppen trivial ist, so gilt er allgemein.

§ 3.

Satz 4. In einer Zerlegung einer Gruppe in direkte unzerlegbare Faktoren läßt sich das Produkt aller vorkommenden zyklischen Faktoren der gleichen Primzahlpotenzordnung durch das isomorphe Produkt aus irgend einer anderen Zerlegung ersetzen.

Es sei

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}, \ \mathfrak{H} = \mathfrak{C} \times \mathfrak{D},$$

worin

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2 \times \cdots \times \mathfrak{P}_m, \ \mathfrak{C} = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2 \times \cdots \times \mathfrak{R}_m;$$

die $\mathfrak{P}_\mu$ und $\mathfrak{R}_\mu$ seien zyklische direkte Faktoren von der Primzahlpotenzordnung p^a. $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$ enthalten keine zyklischen direkten Faktoren der Ordnung p^a.

Der Satz sei bereits bewiesen in allen Fällen, in denen m kleiner ist als im vorliegenden Falle. Es sei

$$\mathfrak{R}_2 \times \mathfrak{R}_3 \times \cdots \times \mathfrak{R}_m = \mathfrak{K},$$

dann ist

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{K} \times \mathfrak{D};$$

setzt man

$$\mathfrak{K} \times \mathfrak{D} = \mathfrak{G},$$

so wird

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{G}.$$

Es sei $\mathfrak{A}'$ die $\mathfrak{A}$-, $\mathfrak{B}'$ die $\mathfrak{B}$-Komponente von $\mathfrak{R}_1$. Es ist im Beweise des Hauptsatzes Fall 1) gezeigt worden, daß von den beiden Gleichungen

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A}' \times \mathfrak{G} \text{ oder } \mathfrak{H} = \mathfrak{B}' \times \mathfrak{G}$$

mindestens eine besteht. Da $\mathfrak{B}$ keinen zyklischen direkten Faktor der Ordnung p^a besitzt, so ist hier

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A}' \times \mathfrak{G}.$$

Da $\mathfrak{H} > \mathfrak{A} > \mathfrak{A}'$, so ist

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \times (\mathfrak{A}, \mathfrak{G}).$$

Setzt man $(\mathfrak{A}, \mathfrak{G}) = \mathfrak{F}$, so wird

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \times \mathfrak{F}, \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{A}' \times \mathfrak{F} \times \mathfrak{B}.$$

Es war

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A}' \times \mathfrak{G},$$

also

$$\mathfrak{F} \times \mathfrak{B} \cong \mathfrak{G}.$$

Da

$$\mathfrak{F} < \mathfrak{F} \times \mathfrak{B} \text{ und } \mathfrak{F} < \mathfrak{G},$$

ordnet dieser Isomorphismus $\mathfrak{F}$ sich selber zu. Der Gruppe $\mathfrak{B}$ ordne er die Untergruppe $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{G}$ zu.

Es ist

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{K} \times \mathfrak{D} \text{ und } \mathfrak{G} = \mathfrak{F} \times \mathfrak{L}.$$

Da $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{F}$ nur aus $m-1$ zyklischen direkten Faktoren der Ordnung p^a bestehen, so ist der Satz für $\mathfrak{G}$ bereits bewiesen; also ist

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{F} \times \mathfrak{D},$$

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A}' \times \mathfrak{F} \times \mathfrak{D} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{D},$$

was zu beweisen war. Der Satz gilt also allgemein, wenn er für $m = 1$ bewiesen ist.

Für $m=1$ sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ zyklische Gruppen der Ordnung p^a. Es sei $\mathfrak{A}'$ die $\mathfrak{A}$-, $\mathfrak{B}'$ die $\mathfrak{B}$-Komponente von $\mathfrak{C}$. Es wird wieder gezeigt, daß

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{A}'\times\mathfrak{D}.$$

Da $\mathfrak{A}'$ von der Ordnung p^a, so ist

$$\mathfrak{A}'=\mathfrak{A},$$

also

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{A}\times\mathfrak{D},$$

was zu beweisen war.

Durch wiederholte Anwendung dieses Satzes ergibt sich:

In einer Zerlegung einer Gruppe in direkte unzerlegbare Faktoren kann man das Produkt aller kommutativen Faktoren durch das entsprechende aus einer anderen Zerlegung ersetzen.

Satz 5. In einer Zerlegung einer Gruppe in direkte unzerlegbare Faktoren kann man irgend einen nicht kommutativen Faktor durch den zentral isomorphen aus einer anderen Zerlegung ersetzen.

Es sei

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{A}\times\mathfrak{B},\ \mathfrak{H}=\mathfrak{C}\times\mathfrak{D},$$

$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ direkt unzerlegbar,

$$\mathfrak{A}\simeq\mathfrak{C}.$$

Es ist

$$\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{H}_i=\mathfrak{C}\cdot\mathfrak{H}_i,$$

$$\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{H}_i=\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}_i,$$

$$\mathfrak{C}\cdot\mathfrak{H}_i=\mathfrak{C}\times\mathfrak{D}_i,$$

also

$$\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}_i=\mathfrak{C}\times\mathfrak{D}_i=\mathfrak{A}\times\mathfrak{D}_i$$

nach Satz 4. Also ist

$$(\mathfrak{A},\mathfrak{D}_i)=E.$$

Es ist

$$(\mathfrak{A},\mathfrak{D})<(\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{H}_i,\mathfrak{D}\cdot\mathfrak{H}_i)=(\mathfrak{C}\cdot\mathfrak{H}_i,\mathfrak{D}\cdot\mathfrak{H}_i)=\mathfrak{H}_i,$$

also

$$(\mathfrak{A},\mathfrak{D})=(\mathfrak{A},\mathfrak{D}_i)=E.$$

Es ist jedes Element von $\mathfrak{A}$ mit jedem Elemente von $\mathfrak{D}$ vertauschbar, da $\mathfrak{A}<\mathfrak{C}\cdot\mathfrak{H}_i$, und jedes Element von $\mathfrak{C}\cdot\mathfrak{H}_i$ mit jedem Elemente von $\mathfrak{D}$ vertauschbar. Das Produkt von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{D}$ ist ein direktes Produkt. Es ist

$$\mathfrak{A}\times\mathfrak{D}=\mathfrak{C}\times\mathfrak{D}=\mathfrak{H},$$

da beide Produkte von gleicher Ordnung sind.

Für seine Ratschläge zur Vereinfachung der Beweisanordnung dieser Arbeit sage ich meinem hochverehrten Lehrer Herrn *Frobenius* meinen Dank.

Die vorliegende Arbeit hatte ich der philosophischen Fakultät der Universität Berlin als Dissertation eingereicht und nach ihrer Genehmigung zurückerhalten, als die Arbeit des Herrn *Maclagan-Wedderburn**), die den gleichen Gegenstand behandelt, zu meiner Kenntnis gelangte.

Sein Beweis ist aber unvollständig. Die Richtigkeit der Gleichung S. 175 unten

$$A_2 \times \cdot\cdot \times A_p = \frac{B_1}{B_1'} \times B_2 \times \cdots \times B_q$$

wird nicht bewiesen, nicht einmal das Bestehen eines Isomorphismus zwischen diesen beiden Gruppen.

Auch sehe ich nicht, an welcher Stelle seines Beweises der Verfasser von der Voraussetzung der Unzerlegbarkeit der Faktoren Gebrauch macht.

Unrichtig ist ferner die Bemerkung S. 176, die ohne Einfluß auf das Hauptresultat ist und folgendermaßen wiedergegeben werden möge: „Eine Gruppe ist identisch eindeutig in direkte unzerlegbare Faktoren zerlegbar, wenn die Ordnungen der Zentren der Faktoren untereinander teilerfremd sind.“ Sie müßte vielmehr lauten:

„*Eine Gruppe ist dann und nur dann identisch eindeutig in direkte unzerlegbare Faktoren zerlegbar, wenn die Ordnung des Zentrums eines jeden Faktors zur Ordnung der Faktorgruppe eines jeden anderen Faktors nach seinem Kommutator teilerfremd ist.*“

---

*) Annals of Mathematics, 2. series, vol. 10, p. 173. [July 1909.] On the Direct Product in the Theory of Finite Groups.